

Mathématiques : Les fonctions trigonométriques

Dans ce cours, nous allons réaliser l'étude approfondie des fonctions trigonométriques. Nous nous intéresserons aux fonctions déjà croisées au collège : les fonctions cos, sin et tan. Dans un premier temps, on va considérer ces fonctions avec une approche géométrique puis dans un second temps, nous les étudierons avec des outils d'analyse et enfin, nous terminerons en étudiant brièvement avec leurs fonctions réciproques très utilisées en physique : arccos, arcsin et arctan.

Table des matières

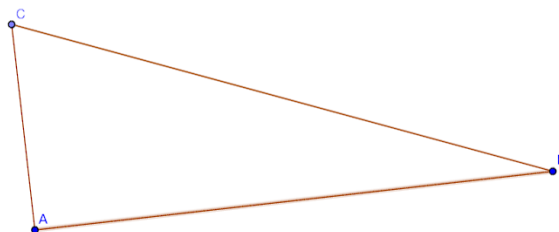
1	Approche géométrique	1
2	Approche analytique	3
2.1	La fonction cosinus	3
2.2	La fonction sinus	4
2.3	La fonction tangente	6
3	Les fonctions circulaires réciproques - HP	6
3.1	La fonction arccosinus	6
3.2	La fonction arcsinus	7
3.3	La fonction arctangente	7

1 Approche géométrique

En classe de troisième, les fonctions trigonométriques ont été vues lorsqu'on cherchait à déterminer un côté d'un triangle rectangle sachant l'un de ses angles et la mesure d'un de ses côtés.

Remarque : La détermination d'un des trois côtés d'un triangle rectangle et d'un de ses trois angles permet de déterminer la valeur tous ses côtés et tous ses angles en utilisant les fonctions trigonométriques et le théorème de Pythagore.

On considère un triangle ABC rectangle en A comme suit :



On note $\alpha = \widehat{ABC}$. On peut alors définir $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$:

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{BC} \quad \sin(\alpha) = \frac{AC}{BC} \quad \tan(\alpha) = \frac{AC}{AB}$$

Ici, AB est le côté adjacent à l'angle α ; AC est le côté opposé à l'angle α et BC est l'hypoténuse du triangle rectangle ABC. Ces définitions vont nous permettre d'introduire la paramétrisation cos et sin dans le cercle unité de $\mathbb{R}$.

Définition 1. Le cercle unité de $\mathbb{R}$

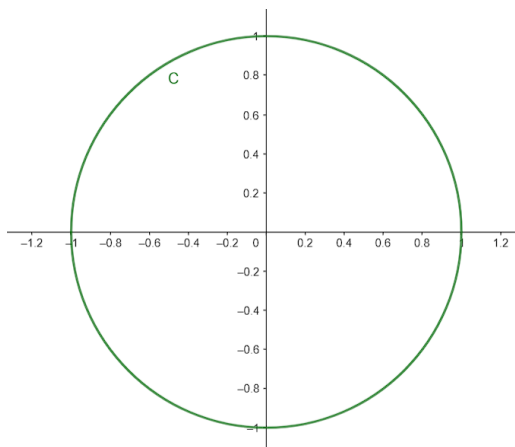
Le cercle unité de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) du plan $\mathbb{R}^2$ qui vérifie l'équation :

$$x^2 + y^2 = 1$$

Le cercle unité de $\mathbb{R}$ peut se récrire :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

On peut voir à quoi ressemble cet ensemble dans le plan $\mathbb{R}^2$:



Si l'on place un point M de coordonnées (x, y) sur le demi-cercle unité de $\mathbb{R}$ à droite alors en définissant les points $O = (0, 0)$ et $A = (x, 0)$, on peut introduire l'angle α comme tel :

$$\alpha = \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM} \right)$$

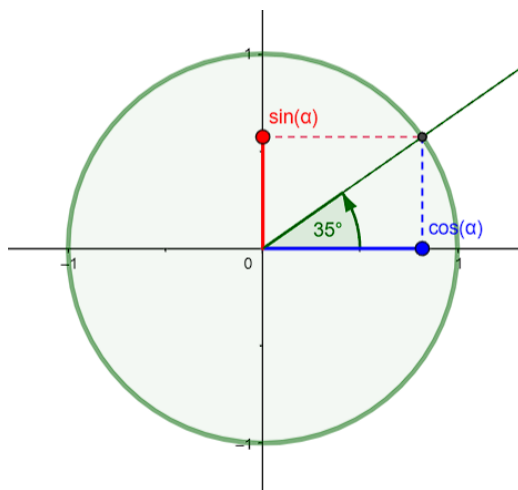
En observant par ailleurs que le triangle OAM est rectangle en A et les relations suivantes restent vraies :

$$\cos(\alpha) = \frac{OA}{1} \quad \sin(\alpha) = \frac{AM}{1} \quad \tan(\alpha) = \frac{AM}{OA}$$

car le triangle rectangle ABC a son hypoténuse égal à 1 (cercle unité : cercle de rayon 1). On remarque alors que pour $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$:

$$OA = \cos(\alpha) \quad ; \quad AM = \sin(\alpha) \quad \text{et} \quad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

On en déduit alors la paramétrisation suivante du cercle unité de $\mathbb{R}$:



On peut aussi parler de **cercle trigonométrique**.

Pour terminer, on donne quelques valeurs du cosinus et du sinus pour quelques valeurs d'angle α . Rappelons que 2π correspond à un angle de 360° , π à un angle de 180° , $\frac{\pi}{2}$ à un angle de 90° et $\frac{\pi}{4}$ à un angle de 45° . Les angles données en fonction de π sont exprimés en radian sinon ils sont exprimés en degrés. Rappelons la conversion :

$$1 \text{ rad (radian)} \doteq \frac{360^\circ}{2\pi} \text{ (degré)}$$

Remarque : $\frac{360^\circ}{2\pi}$ correspond approximativement à 57° .

Valeur de α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	0	0

Nous le verrons, contrairement aux fonctions cosinus et sinus définies sur $\mathbb{R}$, la fonction tangente est définie sur $\mathbb{R}$ privé des points de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. C'est pour cela que $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ n'est pas défini.

Dans cette section, on étudie les fonctions trigonométriques mais selon une approche analytique : étude de fonction classique. On traite dans l'ordre les fonctions cos, sin et tan.

2 Approche analytique

2.1 La fonction cosinus

La fonction cosinus est une fonction que l'on construit et qu'on a d'abord utilisé en géométrie. Sa construction implique une série de propriétés comme sa parité, sa périodicité, son caractère continue et dérivable ou encore le fait qu'elle soit bornée (minorée et majorée).

Remarque : (HP+) Malgré que cette fonction est une construction provenant d'abord de la géométrie, il est possible de l'exprimer comme un « polynôme » infini de la manière suivante,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Cette expression, bien que hors-programme, permet de voir comment les machines (calculatrice par exemple) calcule le cosinus d'un réel.

Remarque : La factorielle d'un entier n , notée $n!$, est définie comme suit :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

Cette notation est au programme de terminale, présent dans le chapitre sur le dénombrement.

Définition 2. La fonction cos

La **fonction cosinus** notée $\cos$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Définition 3. Propriétés du cosinus

1 - La fonction cos est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ de dérivée l'opposé du sinus : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$

2 - La fonction cos est **paire** : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$

3 - La fonction cos est **périodique** de période 2π : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

4 - La fonction cos est **bornée** entre -1 et 1 : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$

Pour terminer, voici la représentation graphique de la fonction cos :



On remarque avec cette représentation qu'on a bien $\cos(0) = 1$, que la fonction cos s'annule une infinité de fois (périodique donc le motif se répète toujours) et qu'elle n'a pas de limite en $\pm\infty$.

Proposition 1. Limite de cos

La **fonction cosinus** n'a pas de limite en $\pm\infty$.

Preuve : Par l'absurde, si la fonction cos avait une limite en $+\infty$ (raisonnement analogie en $-\infty$) alors la suite de terme général $u_n = \cos(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ convergerait aussi en $+\infty$. Comme la suite de terme général u_n converge, toute sous-suite de cette suite converge aussi et vers la même limite. Si l'on considère la sous suite $u_{\varphi(n)} = \cos(n + n\pi) = (-1)^n u_n$, elle ne converge pas. Ce qui contredit l'hypothèse de convergence faite, c'est une contradiction.

Il en résulte que la fonction cos **n'a pas de limite** en $+\infty$.

Proposition 2. Ensemble des zéros du cosinus

La **fonction cosinus** s'annule une infinité de fois et c'est points d'annulation sont donnés dans l'ensemble de ses zéros noté $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{O} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Preuve : Il suffit de se placer sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ pour déterminer les zéros de la fonction cos sur cette intervalle puis par translation de $k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on détermine l'ensemble $\mathcal{O}$ étant donné que cos est périodique de période 2π . Comme cos est paire, on peut juste déterminer les zéros $[0; \pi]$ pour les avoir sur tout l'intervalle $[-\pi; \pi]$. Sur $[0; \pi]$, les zéros sont donnés dans le tableau des valeurs remarquables, il y en a qu'un seul et c'est $\frac{\pi}{2}$. Par parité, $-\frac{\pi}{2}$ est aussi un zéro de cos sur $[-\pi; \pi]$. Enfin, par translation de $k\pi$, on a bien le résultat voulu :

$$\mathcal{O} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Proposition 3. Formules d'additions pour le cosinus (HP)

La **fonction cosinus** vérifient les relations suivantes, appelées formules d'addition :

1 - $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

2 - $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

3 - $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

2.2 La fonction sinus

La fonction sinus est une fonction que l'on construit et qu'on a aussi utilisé en géométrie. Sa construction implique une série de propriétés comme sa parité, sa périodicité, son caractère continue et dérivable ou encore le fait qu'elle soit bornée (minorée et majorée).

Définition 4. La fonction sin

La **fonction sinus** notée sin est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Définition 5. Propriétés du sinus

1 - La fonction sin est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ de dérivée le cosinus : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x)$

2 - La fonction sin est **impaire** : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$

3 - La fonction sin est **périodique** de période 2π : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

4 - La fonction sin est **bornée** entre -1 et 1 : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$

Pour terminer, voici la représentation graphique de la fonction sin :



On remarque avec cette représentation qu'on a bien $\sin(0) = 0$, que la fonction $\sin$ s'annule une infinité de fois (périodique donc le motif se répète toujours) et qu'elle n'a pas de limite en $\pm\infty$.

Proposition 4. Limite de $\sin$

La **fonction sinus** n'a pas de limite en $\pm\infty$.

Preuve : Par l'absurde, si la fonction $\sin$ avait une limite en $+\infty$ (raisonnement analogie en $-\infty$) alors la suite de terme général $u_n = \sin(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ convergerait aussi en $+\infty$. Comme la suite de terme général u_n converge, toute sous-suite de cette suite converge aussi et vers la même limite. Si l'on considère la sous suite $u_{\varphi(n)} = \sin(n + n\pi) = (-1)^n u_n$, elle ne converge pas. Ce qui contredit l'hypothèse de convergence faite, c'est une contradiction.

Il en résulte que la fonction $\sin$ **n'a pas de limite** en $+\infty$.

Proposition 5. Ensemble des zéros du sinus

La **fonction sinus** s'annule une infinité de fois et ces points d'annulation sont donnés dans l'ensemble de ses zéros noté $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{O} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Preuve : Il suffit de se placer sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ pour déterminer les zéros de la fonction $\sin$ sur cette intervalle puis par translation de $k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on détermine l'ensemble $\mathcal{O}$ étant donné que $\sin$ est périodique de période 2π . Comme $\sin$ est impaire, on peut juste déterminer les zéros $[0; \pi]$ pour les avoir sur tout l'intervalle $[-\pi; \pi]$. Sur $[0; \pi]$, les zéros sont donnés dans le tableau des valeurs remarquables, il y en a deux et c'est 0 et π . Par parité, $-\pi$ est aussi un zéro de $\sin$ sur $[-\pi; \pi]$. Enfin, par translation de $k\pi$, on a bien le résultat voulu :

$$\mathcal{O} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Proposition 6. Formules d'additions pour le sinus (HP)

La **fonction sinus** vérifient les relations suivantes, appelées formules d'addition :

1 - $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$

2 - $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)$

Proposition 7. Relations cosinus-sinus

Les fonctions cosinus et sinus vérifient les relations suivantes :

1 - $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

2 - $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ (relation HP)

3 - $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x)$ (relation de duplication - HP)

Point de vigilance sur la première égalité qui est au programme ! C'est une conséquence directe du théorème de Pythagore écrite dans un triangle rectangle. En effet, si l'on reprend les points O , A et M définis dans la section 1, on a bien d'après le théorème de Pythagore :

$$OA^2 + AM^2 = OM^2 \iff OA^2 + AM^2 = 1 \iff \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

où $\alpha = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM})$.

Remarque : (HP+) Comme fait plus haut pour la fonction cosinus, la fonction sinus s'écrit aussi comme un « polynôme » infini comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Cette expression, bien que hors-programme, permet de voir comment les machines (calculatrice par exemple) calcule le cosinus d'un réel.

2.3 La fonction tangente

Définition 6. La fonction tan

La **fonction tangente** notée $\tan$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$, continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$. On la définit aussi comme :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Définition 7. Propriétés de la tangente

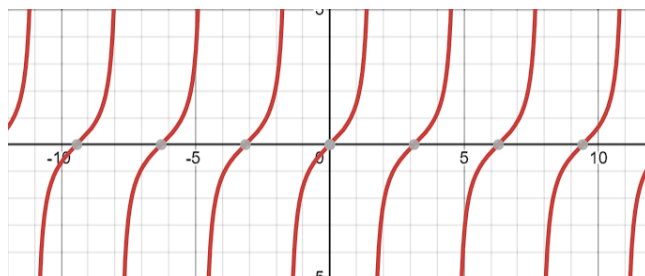
1 - La fonction $\tan$ est **dérivable** sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ dont la dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

2 - La fonction $\tan$ est **impaire** : $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(-x) = -\tan(x)$

3 - La fonction $\tan$ est **périodique** de période π : $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(x + \pi) = \tan(x)$

Pour terminer, voici la représentation graphique de la fonction $\tan$:



On remarque avec cette représentation qu'on a bien $\tan(0) = 0$, que la fonction $\tan$ s'annule une infinité de fois (périodique donc le motif se répète toujours) et qu'elle n'a pas de limite en $\pm\infty$ mais elle en a au niveau des points $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 8. Limite de tan

La **fonction tangente** n'a pas de limite en $\pm\infty$. En revanche, elle a une limite en $\frac{\pi}{2}$ à gauche et à droite :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$$

I Ces limites seront admises.

Proposition 9. Ensemble des zéros de la tangente

La **fonction tangente** s'annule une infinité de fois et ces points d'annulation sont donnés dans l'ensemble de ses zéros noté $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{O} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Preuve : La démonstration est immédiate. En effet, on a dans la définition 6 :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Donc les zéros de la fonction tangente sont les mêmes que celle du sinus. Donc d'après la proposition 5 :

$$\mathcal{O} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

ce qui achève cette preuve.

3 Les fonctions circulaires réciproques - HP

3.1 La fonction arccosinus

Définition 8. La fonction arccos

La **fonction arccosinus** notée $\arccos$ est définie sur $[-1; 1]$, continue sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $] - 1; 1[$. C'est l'unique fonction qui vérifie les égalités suivantes :

1 - $\forall x \in \mathbb{R}, \arccos(\cos(x)) = x$

2 - $\forall x \in [-1; 1], \cos(\arccos(x)) = x$

Proposition 9. La dérivée de arccos

La **fonction arccosinus** est dérivable sur $] - 1; 1[$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in] - 1; 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3.2 La fonction arcsin**Définition 9. La fonction arcsin**

La **fonction arccosinus** notée $\arcsin$ est définie sur $[-1; 1]$, continue sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $] - 1; 1[$. C'est l'unique fonction qui vérifie les égalités suivantes :

1 - $\forall x \in \mathbb{R}, \arcsin(\sin(x)) = x$

2 - $\forall x \in [-1; 1], \sin(\arcsin(x)) = x$

Proposition 10. La dérivée de arcsin

La **fonction arcsinus** est dérivable sur $] - 1; 1[$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in] - 1; 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Proposition 11. Relation arccos-arcsin

Les fonctions $\arccos$ et $\arcsin$ vérifient la relation suivante :

$$\forall x \in [-1; 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

3.3 La fonction arctangente**Définition 10. La fonction arctan**

La **fonction arctangente** notée $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. C'est l'unique fonction qui vérifie les égalités suivantes :

1 - $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, \arctan(\tan(x)) = x$

2 - $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$

Proposition 12. La dérivée de arctan

La **fonction arctangente** est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Proposition 13. Relation vérifiée par arctan

La **fonction arctangente** vérifie la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2}$$

où sgn est la fonction signe qui renvoie le signe de x . Si $x \geq 0$, $\operatorname{sgn}(x) = +1$ sinon, si $x \leq 0$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$.